C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274, p. 254-256 (17 janvier 1972) Série A

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Construction de fonctionnelles multiplicatives discontinues sur des algèbres métriques.* Note (*) de M. **John Benedetto**, présentée par M. Jean Leray.

On utilisera les notations de ([1]).

1. Une algèbre de Fréchet. — Soit $\psi = \sum a_\varphi \psi_\varphi \in \mathcal{B}$, $\psi_\varphi(f) = (f, \varphi)$ et $s, t \in \mathcal{B}'$. On définit

$$\langle st, \psi \rangle = \sum a_\varphi \langle s, \psi_\varphi \rangle \langle t, \psi_\varphi \rangle;$$

st est un élément de $\mathcal{B}'$.

Proposition 1. — *$\mathcal{B}'$ est une algèbre de Fréchet commutative unitaire avec involution. L'élément unité est la mesure de Dirac δ et l'involution $t - t^*$ est donnée par*

$$\langle t^*, \psi \rangle = \langle t, \bar{\psi} \rangle.$$

Pour la démonstration, il faut remarquer que la m-convexité découle des conditions de Gelfand-Michael dans ([2]).

Si $Y \subseteq \mathcal{B}'$ on notera $\langle Y \rangle$ l'algèbre engendrée par Y.

2. Conditions suffisantes pour l'existence d'homomorphismes discontinus dans les algèbres de Fréchet. — Soit E un ensemble qui n'est pas de synthèse spectrale, avec $m(E) = 0$, et soit $T \in PM(E)$ telle que $\hat{T}(0) = 0$ et $\varphi \in k(E)$ vérifiant $\langle T, \varphi \rangle \neq 0$. Il n'est pas difficile de voir que pour $u\,T = t$ on a $t^n \notin PM(\Gamma)$.

Posons $M_\delta(u\,E) = \{ \delta_{u\lambda} : \lambda \in E \}$. $s \in \langle M_\delta(u\,E) \rangle$ si

$$s = \sum c_{i_1 \ldots i_n} \delta^{i_1}_{u\lambda_{i_1}} \ldots \delta^{i_n}_{u\lambda_{i_n}} \tag{1}$$

où $(i_1, \ldots, i_n)$ est une n-uple d'entiers positifs, la somme finie et n variable; si $(i_1, \ldots, i_n) = (j_1, \ldots, j_n)$ alors il existe p tel que $\lambda_{i_p} \neq \lambda_{j_p}$ et pour chaque i $\lambda_{i_j} \neq \lambda_{i_k}$. Définissons $\tilde{h}(\delta_u) = 1$ si $\lambda \in E$ et $\tilde{h}(t) = \alpha \neq 0$; considérons la situation suivante :

(H) $\exists\, h : H \to \mathbf{C}$ où H est une sous-algèbre fermée de $\mathcal{B}'$ et h un homomorphisme tel que $h = \tilde{h}$ sur $M_\delta(u\,E) \cup \{ t \}$.

Proposition 2. — *Si* (H) *est vérifiée alors h est une fonctionnelle multiplicative discontinue sur l'algèbre de Fréchet* H.

Démonstration. — Posons $T_n = \sum_1^n k_j (\delta_{\lambda_j} - \delta_{\gamma_j})$ où $T = \sum_1^\infty k_j (\delta_{\lambda_j} - \delta_{\gamma_j})$ sur $C^1(\mathbf{T})$ et (λ_j, γ_j) sont les intervalles du complémentaire de E. Il n'est pas difficile de vérifier que $t_n \to t$ dans $\beta(\mathcal{B}', \mathcal{B})$ où $u\, T_n = t_n$.

D'autre part, on a $\langle T, e^{i\psi} \rangle = 0$ si $\psi \in k(E) \cap G$ d'après le théorème de Beurling-Pollard.

3. Construction d'homomorphismes discontinus sur des algèbres métriques.

Proposition 3. — *Il existe des sous-algèbres $X \subseteq \mathcal{B}'$ sur lesquelles on a des fonctionnelles multiplicatives discontinues $h : X \to \mathbf{C}$.*

Démonstration. — Considérons (1) et supposons que $s = 0$. On va montrer que chaque $c_{i_1 \dots i_n} = 0$. Écrivons $c_{i_1 \dots i_n}$ comme $c_1, c_2, \dots, c_n$; on peut supposer que chaque $c_j \neq 0$.

Soit $\psi \in G$ tel que $\psi = 0$ sur tout $\lambda \neq \lambda_{i_1}$ (où $u\,\lambda$ est une masse ponctuelle pour quelques « δ » dans la somme représentative).

On a ainsi, pour un tel ψ

$$(2) \qquad 0 = \langle s, \psi_\psi \rangle = e^{il_1 \psi(\lambda_{i_1})} (c_1 + c_2\, e^{ik_2 \psi(\lambda_{i_1})} + \dots + c_m\, e^{ik_m \psi(\lambda_{i_1})}) + d$$

où $m \leq n$, $k_j \in \mathbf{Z}$, et où on a réordonné les indices.

Si chaque $k_j = 0$, alors $d = 0$ et il est simple de vérifier dans ce cas que $c_1 = 0$.

Supposons donc que $k_2 \neq 0$; si $d = 0$ on obtient de (2)

$$-c_1 = e^{ik_2 \psi(\lambda_{i_1})} [c_2 + c_3\, e^{im_3 \psi(\lambda_{i_1})} + \dots + c_m\, e^{im_m \psi(\lambda_{i_1})}].$$

En appliquant un argument de dérivation on obtient alors une contradiction et on a ainsi $c_1 = 0$.

Donc, la représentation naturelle des éléments de $\langle M_\delta(u\,E) \rangle$ est unique et on peut définir h sur $\langle M_\delta(u\,E) \rangle$ comme

$$h(s) = \sum c_{i_1 \dots i_n}$$

car $\tilde{h}(\delta_{u\lambda}) = 1$.

h, ainsi défini, est une fonctionnelle multiplicative sur $\langle M_\delta(u\,E) \rangle$.

Soit maintenant $s \in X = \langle t, \langle M_\delta(u\,E) \rangle \rangle$ où X est l'algèbre engendrée par t et $\langle M_\delta(u\,E) \rangle$. On écrit s comme

$$s = q + \sum_{n=1}^{N} (t^n r_n + d_n t^n) = q + p$$

où q, $r_n \in \langle M_\delta(u\,E) \rangle$ (éventuellement nulles) et $d_n \in \mathbf{C}$. Si on démontre que $s \notin \langle M_\delta(u\,E) \rangle$ si $t^n(r_n + d_n) \neq 0$ pour un certain n, il sera facile de vérifier que h est un homomorphisme bien défini.

Soit $\{\varphi_m\} \subseteq G$ vérifiant $\lim |\hat{t}(\varphi_m)| = \infty$. On va montrer que dans ce cas $\lim |\hat{s}(\varphi_m)| = \infty$ et comme $\langle M_\delta(u\,E)\rangle \subseteq PM(\Gamma)$ on aura $s \notin \langle M_\delta(u\,E)\rangle$. Il suffit évidemment de vérifier que $\lim |\hat{p}(\varphi_m)| = \infty$.

Soit donc $\hat{t}(\varphi) \neq 0$

$$\begin{aligned}
|\hat{p}(\varphi)| &= \left| \sum_{1}^{N} [\hat{t}(\varphi)]^n (\hat{r}_n(\varphi) + d_n) \right| \\
&= |\hat{t}(\varphi)|^N \left| (\hat{r}_N(\varphi) + d_N) + \frac{(\hat{r}_{N-1}(\varphi) + d_{N-1})}{\hat{t}(\varphi)} + \frac{(\hat{r}_1(\varphi) + d_1)}{[\hat{t}(\varphi)]^{N-1}} \right| \\
&\geqq |\hat{t}(\varphi)|^N \left| |\hat{r}_N(\varphi) + d_N| - \sum_{1}^{N-1} \left| \frac{(\hat{r}_j(\varphi) + d_j)}{[\hat{t}(\varphi)]^{N-j}} \right| \right|.
\end{aligned}$$

Puisque $\sup \{ |\hat{r}_j(\varphi)| : \varphi \in G, j \} < \infty$ et $\lim |\hat{t}(\varphi_m)| = \infty$ il nous faut seulement trouver un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout m on ait

$$|\hat{r}(\varphi_m) + d| = |\hat{r}_N(\varphi_m) + d_N| > \varepsilon.$$

Si $r = r_N = 0$ le résultat est établi, supposons donc $r \neq 0$.

En écrivant

$$r = \sum c_{i_1 \ldots i_k}\, \delta^{i_1}_{u\lambda_{i_1}} \ldots \delta^{i_k}_{u\lambda_{i_k}}$$

soit b le $c_{i_1 \ldots i_k}$ qui est le plus petit en valeur absolue. On obtient

$$|\hat{r}(\varphi_m) + d| \geqq \left| |b| - |d| - \sum_{b \neq c_{i_1 \ldots i_k}} |c_{i_1 \ldots i_k}| \right|.$$

Donc $s \notin \langle M_\delta(u\,E)\rangle$ s'il existe n tel que $t^n(r_n + d_n) \neq 0$.

C. Q. F. D

(*) Séance du 3 janvier 1972.

(1) J. Benedetto, *Comptes rendus*, 274, série A, 1972, p. 169.

(2) E. A. Michael, *Locally m-convex Topological Algebras*, (*memoirs A. M. S.*, 1952, p. 7 and 15).

Department of Mathematics,
University of Maryland,
College Park, Maryland 20742.